The Islamic University Journal (Series of Natural Studies and Engineering)
Vol.14, No.2, P.121-129, 2006, ISSN 1726-6807, http//www.iugaza.edu.ps/ara/research/

التوبولوجيا المدمجة من نوع ®*

أ.د. جاسر صرصور
قسم الرياضيات الجامعة الإسلامية
jasser@mail.iugaza.edu

ملخـص: سنعرف تبولوجيا جديدة على الفضاء المحدب محليا X باستخدام المجموعة المدمجة من نوع ® وسنطلق عليه اسم التوبولوجيا المدمجة من نوع ®، كما سنبرهن بعض الخواص لهذه التبولوجيا الجديدة.

ABSTRACT: Let X be a locally convex space, using the definition of ®-compact set, I will define a new topology on X, called ®-compact topology, and prove some properties of the new topology

1-1 مقدمة وبعض المبادئ:

لقـد درس فـريد و رمضـان فـي المرجع [3] بعض أنواع المجموعات المحدبة من النوع ® (® - compact) فـي الفضـاءات المعـيارية حيث متتابعات هذه الفضاءات ذات الأقطار n تـتقارب الى الصفر بمعدلات مختلفة . ولقد اثبت فريد و رمضان كذلك أن الأقطار n لحوا صل الضرب الكارتيزية المحدودة للمجموعات المدمجة من النوع ® هي مدمجة من النوع ® أيضا . و فـي المرجع [8] درس زياد صافي المجموعات المدمجة من النوع ® في الفضاءات المحدبة محليا.

سـنرمز بالرمـز C_0 لفضاء كل متتابعات الأعداد الحقيقية التي تتقارب إلى الصفر كما سنرمز بالرمز (S) لفضاء كل متتابعات الأعداد الحقيقة التي تتناقص بسرعة و المعرفة كالتالي

$$(S) = \left\{ (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} : \sup_n n^{\alpha} |\lambda_n| < \infty \quad \forall \alpha > 0 \right\}$$

وكذلـك سـنرمز بالرمـز $\Lambda(\alpha)$ حيث ان $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = \alpha$, $0 < \alpha_1 \le \alpha_2 \le ......$ لفضاءات متسلسلات القوى لجميع متتابعات الأعداد الحقيقية المعرفة كالتالي

$$\Lambda(\alpha) = \left\{ (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} : \sup_n R^{\alpha_n} |\lambda_n| < \infty \quad \forall R > 0 \right\}$$

أما الرمز (R) فهو لفضاء كل المتتابعات الجذرية للأعداد الحقيقية المعرفة كالتالي

---

* تم دعم هذا البحث من عمادة البحث العلمي – الجامعة الإسلامية بغزة

$$(R)=\left\{(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}:\ \lim_n \sqrt[n]{|\lambda_n|}=0\right\}$$

كمـا نعنـي بالرمـز $\lfloor x\rfloor$ الجـزء الصـحيح للعـدد الحقيقـي x بحيـث ان $\lfloor x\rfloor=\alpha$ حيث $x=\alpha+\beta,\ 0\le\beta<1$.

كل الفضاءات المذكورة في هذا البحث هي فضاءات محدبة محليا.

بالنسبة للمصطلحات غير المشروحة يمكن للقارئ الرجوع إلى المراجع [2,4,,67] .

ملاحظات 1-1 : من النظرية "1" من المرجع[3] فان

1-في الفضاء (S) ، $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\in(S)$ إذا و فقط إذا كان $\lim_n|\lambda_n|n^{\alpha}=0$ لجميع قيم $\alpha>0$.

2- الفضاء (S) هو حالة خاصة من الفراغ $\Lambda(\alpha)$.

3- إذا كان $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\in(R)$ فان $(\lambda_n n^{\alpha})_{n=1}^{\infty}\in(R)$ لجميع قيم $\alpha>0$.

4-كـل متـتابعة جذريـة هي متتابعة سريعة التناقص و العكس ليس بالضرورة صحيحا، وفي الحقيقة إذا كان $\lambda_n=\dfrac{1}{2^n},n\in N$ فان, $\lim_n \lambda_n n^{\alpha}=\lim_n \dfrac{n^{\alpha}}{2^n}=0$ لكل $\alpha>0$ ، وبما أن $\dfrac{1}{2}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n}}$ فان $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\in(S)\setminus(R)$.

تعـريف 1 .1: مـن المرجع [3] ، مثالي المتتابعة من النوع ® على مجال قياسي هو مجموعة جزئـية مـن الفضاء l_{∞} (فضاء كل المتتابعات المحدودة على مجموعة الأعداد الحقيقية) وهذا المثالي يحقق الشروط التالية

(i). $e_i\in$ ®, و الواحد الصحيح في المكان i حيث, $e_i=(0,0,\ldots,1,\ldots)$

(ii) إذا كان $x_1,x_2\in$ ® فان $x_1+x_2\in$ ®

(iii) إذا كان $x\in$ ® و $y\in l_{\infty}$ فان $x.y\in$ ®

(iv)إذا كان $x=(x_0,x_1,\ldots)\in$ ® .فان $(x_{\left[\frac{n}{2}\right]})_{n=1}^{\infty}=(x_0,x_0,x_1,x_1,\ldots)\in$ ®

تعـريف 2-1 اذا كـان E هـو مثاليا فإننا سنسمي المؤثر $D:E\to E$ و المعرف كالتالي $D((x_n)_{n=0}^{\infty})=(x_{\left[\frac{n}{2}\right]})_{n=0}^{\infty}$ بأنـه المؤثـر الموسع وكذلك سنسمي الشرط (iv) في التعريـف السابق 1-1 " بخاصية التوسع" .

يجـب ملاحظـة أن فضاءات المتتابعات (S)، (R) ، $\Lambda(\alpha)$ هي أمثلة على المثاليات (انظر المرجع [4] صفحة 9).

تعـريف 3-1:بفـرض أن A,D همـا مجموعـتان محدبتان تحدبا مطلقا في الفضاء ألاتجاهي للتبولوجـيا E بحيـث إن D يمتص A ، أي انه يوجد $\lambda > 0$ بحيث أن $A \subset \rho D$ لجميع قيم $\rho > \lambda$ و إذا كـان F فضـاء جزئـيا من الفضاء E فإننا سنعرف $\delta(A,D;F)$ كالتالي:-

$$\delta(A,D;F) = \inf\{r > 0 : A \subset rD + F\}.$$

وسنعرف القطر رقم n من المجموعة A بالنسبة إلى المجموعة D كالتالي :-

$$\delta_n(A,D) = \inf\{\delta(A,D;F) : \dim(F) \le n\}, \quad n = 0,1,2,.....$$

وهذا يحقق الخواص التالية :-

$\delta_0(A,D) \ge \delta_1(A,D) \ge ... \ge \delta_n(A,D)... \ge 0.$ (1)

(2) إذا و فقـط إذا كانت المجموعة A موجودة في فضاء خطي جزئي من الفضاء E ذو البعد n على الأكثر فان $\delta_n(A,D) = 0$

(3) إذا كانت المجموعة A هي مجموعة جزئية محدودة من الفضاء E فان المجموعة A تكون مدمجـا مـتقدما إذا و فقـط إذا كان $\underset{n}{Lim}(\delta_n(A,U)) = 0 \quad \forall U \in \mu(E)$ حيث $\mu(E)$ هو أساس محلي للصفر في الفضاء E

(4) إذا كان $T : E \to F$ هو مؤثر خطي فان $\delta_n(T(A),T(D)) \le \delta_n(A,D).$

(5) إذا كانت $A_1 \subset A$ وكانت $D \subset D_1$ فان $\delta_n(A_1,D_1) \le \delta_n(A,D).$

فرضـية 1-1 . إذا كانـت W هي مجموعة محدبة تحدبا مطلقا في الفضاء ألاتجاهي E وكانت A,B مجموعتان جزئيتان من الفراغ E ممتصتان بالمجموعة W فان $\delta_{2n}(A\bigcup B),W) \le \delta_n(A),W) + \delta_n(B),W).$ وكذلـــــــــــــك فـــــــــــــان $\delta_{2n+1}(A\bigcup B),W) \le \delta_n(A),W) + \delta_n(B),W).$

الـبرهان: إذا كـان t عددا اختياريا اكبر من الصفر فانه يوجد فضاءان جزئيان اتجاهيان F,K بعديهمـا اقـل مـن أو يسـاوي n بحيـث أن $A \subset (t + \delta_n(A,.W))W + F$ وكذلـك $B \subset (t + \delta_n(B,W))W + K$

اذا كـان $\delta_n(A,w) + \delta_n(B,w) + 2t = r$ فان $A \subset rW + F \ and \ B \subset rW + K$ ولهذا فـان $A \cup B \subset rW + span(F \cup K)$ وبمـا ان بعـد الفراغ $\mathrm{span}(F \cup B)$ اقل من او يساوي 2n وكذلك t عدد اختياري موجب فان $\delta_{2n}(A\bigcup B),W) \le \delta_n(A),W) + \delta_n(B),W).$ وبما ان $\delta_{2n+1}(A\bigcup B),W) \le \delta_{2n}(A\bigcup B),W)$

إذن $\delta_{2n+1}(A\bigcup B),W) \le \delta_n(A),W) + \delta_n(B),W).$.

2 المجموعات المدمجة من النوع ®

تعريف 2-1:إذا كان هناك مثالي $\circledR \subset c_0$، فان المجموعة الجزئية D من الفضاء المحدب محليا E تسمى مدمجة من النوع ® إذا كان $(\delta_n(D,U)_{n=0}^{\infty}) \in \circledR$ لجميع قيم $U \in \mu(E)$.

أمثلة : (1) كل مجموعة محدودة هي مدمجة من النوع ®.

(2) بمـا أن $\delta_n(B,U) \le \delta_n(A,U)$ لجميع المجموعات الجزئية B من المجموعة A فان كل مجموعة جزئية من المجموعة المدمجة من النوع ® هي مجموعة مدمجة من النوع ® .

(3) إذا كانـت $D = \left\{(x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| 2^n \le 1\right\}$ وكذلـك $B = \left\{(x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| n \le 1\right\}$ هـي مجموعات جزئية من ℓ_1 فانه طبقا للنقطة 9.1.3 من المرجع [7] فان $\delta_n(D,\varepsilon B_{l_1}) = \dfrac{1}{2^n \varepsilon}$ وكذلك فان $\delta_n(B,\varepsilon B_{l_1}) = \dfrac{1}{n\varepsilon}$ حيث B_{l_1} هي كرة الوحدة المغلقة في ℓ_1 حيث $(x_{\left[\frac{n}{2}\right]})_{n=1}^{\infty} = (x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots) \in \ell_1$ ومن ثم فان D هو مدمج متقدم ومدمج سريع لكنه ليس مدمجا جذريا وكذلك فان B هو مدمج متقدم لكنه ليس مدمجا سريعا.

نظرية 2.1:الصورة الخطية المتصلة لأي مجموعة مدمجة من النوع ® هي مدمجة من النوع®.

البرهان: انظر النظرية 2.2.7 من المرجع [8] .

فرضية 2.1: إذا كانت A,B مجموعتين جزئيتين مدمجتين من النوع ® في الفضاء ألاتجاهي للتبولوجي E فان $A \cup B$ هي مجموعة مدمجة من النوع ® .

الـبرهان: بمـا انـه لجميع المتتابعات $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \circledR$ فان $(x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots) \in \circledR$ $= (x_{\left[\frac{n}{2}\right]})_{n=1}^{\infty}$.باسـتخدام الاسـتنتاج الرياضـي فـان المتـتابعة $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ حيـث $y_{(mn-i)} = x_n \;\; \forall i = 0,1,2,3,\ldots(m-1)$ موجـودة في ®، وبما انه لأي جوار U للصفر فـان $(\delta_n(\mathrm{A,U}))_{n=1}^{\infty}$ and $(\delta_n(B,U))_{n=1}^{\infty}$ موجودتـان فـي ® ،لهـذا فـان $(\delta_n(\mathrm{A,U}) + \delta_n(B,U))_{n=1}^{\infty}$ موجودة في ®.

إذا كان $x_n = \delta_n(A,U) + \delta_n(B,U) \quad \forall n \in N$ ، فان $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ موجودة في ® ومن ثم فان $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ موجودة في ® حيث $y_{(8n-i)} = x_n \;\; \forall i = 0,1,2,3,\ldots 7$

بما إن $\delta_{2n}(A\bigcup B),W) \le \delta_n(A),W) + \delta_n(B),W)$.

وكذلـــك $\delta_{2n+1}(A\bigcup B),W) \le \delta_n(A),W) + \delta_n(B),W)$. و كذلـــك أيضـــا $\delta_0(A,D) \ge \delta_1(A,D) \ge ... \ge \delta_n(A,D)... \ge 0$، فان $\delta_n(A\bigcup B),W) \le y_n \ \forall n > 3$.

ولكـن $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ تنتمـي إلى ® ،لذلك فانه باستخدام النقطة رقم (iii) من التعريف (1.1) فان $A \cup B$ هي مجموعة مدمجة من النوع ® .

نتيجة:2.1 الاتحاد المحدود لمجموعات مدمجة من النوع ® هي مجموعة مدمجة من النوع ® .

3 التبولوجيا المدمجة من النوع ®

نظرية3.1 : إذا كانت Γ={ A: A هي مجموعة جزئية مدمجة من النوع ® في X أوX=A } فان Γ تحقق ما يأتي:-

(i)-ϕ وكذلك X تنتمي إلى Γ

(ii)-الاتحاد المحدود لعناصر Γ ينتمي إلى Γ

(iii)- التقاطع الاختياري لعناصر من Γ ينتمي إلى Γ

البرهان: نظرا لأن المجموعة الخاوية ϕ هي مجموعة مدمجة من النوع ® فان ϕ تنتمي إلى Γ ، و أيضـا مـن تعريف Γ فان X تنتمي إلى Γ . وباستخدام النتيجة 2.1 ، فان الاتحاد المحدود للمجموعـات المدمجة من النوع ® هو مجموعة مدمجة من النوع ® ، لهذا فان الاتحاد المحدود لعناصـر من Γ ينتمي إلى Γ . ونظرا لان أي مجموعة جزئية من المجموعة المدمجة من النوع ® تكون مدمجة من النوع ® فان التقاطع الاختياري لعناصر من Γ يكون موجودا في Γ .

ملاحظـة 3.1 : المجموعة { X\ A: A∈Γ } =ℑ هي تبولوجيا على X حيث Γ هي مجموعة كل المجموعات المغلقة والتي سنطلق عليها اسم التبولوجيا المدمجة من النوع ®

ملاحظـة 3.2 :-(1) إذا اشتملت X على عنصرين أو أكثر فان التبولوجيا المدمجة من النوع ® تكون تبولوجيا غير بديهية (غير تافهة).

(2) إذا كانـت X هـي مجموعة مدمجة من النوع ® فان التبولوجيا المدمجة من النوع ® هي تبولوجيا منفصلة.

نظرية 3.2 :التبولوجيا المدمجة من النوع ® أقوى من التبولوجيا المصاحبة المحدودة (cofinite topology)

الـبرهان : بما ان كل مجموعة محدودة هي مجموعة مدمجة من النوع ® و بالتالي فهي مغلقة فـي التـبولوجا المدمجـة من النوع ® ، و حيث إن كل مجموعة مغلقة في التبولوجيا المحدودة

المصاحبة هي مجموعة محدودة او تساوي كل الفضاء،إذن فهي مغلقة في التبولوجا المدمجة من الـنوع ® وبـناء علـيه فـان التبولوجـيا المدمجة من النوع ® أقوى من التبولوجيا المحدودة المصاحبة .

نتيجة 3.1 : التبولوجيا المدمجة من النوع ® هي الفراغ T_1

فرضية 3.1: اذا كان $®_1,\ ®_2$ مثاليين حيث $®_1 \subset ®_2$ فان التبولوجيا المدمجة من النوع $®_1$ اضعف من التبولوجيا المدمجة من النوع $®_2$.

الـبرهان: بمـا إن $®_1 \subset ®_2$ فان كل مجموعة مدمجة من النوع $®_1$ هي مجموعة مدمجة من الـنوع $®_2$ ولذلك فان كل مجموعة جزئية مغلقة من X بالنسبة إلى التبولوجيا المدمجة من النوع $®_1$ هي مجموعة جزئية مغلقة من X بالنسبة إلى التبولوجيا المدمجة من النوع $®_2$ ، ومن ثم فان التبولوجيا المدمجة من النوع $®_1$ تكون اضعف من التبولوجيا المدمجة من النوع $®_2$.

مثال : إذا كان $X = \ell_1$ وكان $U=\{x : |x|<1\}$ فان $\upsilon=\{(1/2^k)u: k\in N\}$ هو أساس محلي للصـفر في X ، إذا كان $A=\{(1/2^k)e_n: : n\in N\}$ و كان $®_1 =(R)$ هو فضاء كل المتتابعات الجذرية لمجموعة الأعداد الحقيقية و المعطى على الشكل $(R) = \left\{(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} : \lim_n \sqrt[n]{|\lambda_n|} = 0\right\}$

و إذا كان $®_2= (S)$ فضاء كل المتتابعات المتناقصة بسرعة لمجموعة الأعداد الحقيقية و المعطى على الشكل $(S) = \left\{(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} : \sup_n n^{\alpha}|\lambda_n| < \infty \ \ \forall \alpha > 0\right\}$

فان A هي مجموعة مدمجة من النوع $®_2$ وليس مجموعة مدمجة من النوع $®_1$.

نتيجة 3.1: إذا كانت X فضاء محدبا تحدبا محليا وكان $®_1$، $®_2$ مثاليان حيث $®_1 \neq ®_2$ فان التبولوجـيا المدمجة من النوع $®_1$ليس بالضرورة ان تكون مساوية للتبولوجيا المدمجة من النوع $®_2$.

فرضـية 3.2 : إذا كان $(X, \Im_1), (X, \Im_2)$ فضاءان محدبان تحدبا محليا حيث $\Im_1$ اضعف من $\Im_2$ فـان التبولوجـيا المدمجـة من النوع ® بالنسبة الى $\Im_2$ اضعف من التبولوجيا المدمجة من النوع ® بالنسبة الى $\Im_1$.

الـبرهان: نفـرض ان τ_1 هـي التبولوجـيا المدمجة من النوع ® بالنسبة إلى $\Im_1$ وان τ_2 هي التبولوجـيا المدمجـة مـن النوع ® بالنسبة إلى $\Im_2$. إذا كانت $O \in \tau_2$ هي مجموعة اختيارية مفـتوحة و غير خاوية فان المجموعة X\O هي مجموعة مغلقة و من ثم فإنها مجموعة مدمجة مـن الـنوع ® بالنسـبة الـى $\Im_2$ ، لهـذا فـان $(\delta_n(X \setminus O, U)_{n=0}^{\infty}) \in ®$ لجمـيع قـيم $U \in \mu(X)$ حيث $\mu(X)$ هو أساس مغلق للصفر في X بالنسبة الى $\Im_2$.

وبمـا ان $\Im_1 \subset \Im_2$ فـان $(\delta_n(X \setminus O,U)_{n=0}^{\infty}) \in$ ® لجميع قيم $u\in\mu(X)$ حيث $\mu(X)$, هو أسـاس محلي للصفر في X بالنسبة إلى $\Im_1$ ، لهذا فان X\O هي مجموعة مدمجة من النوع ® بالنسبة إلى $\Im_1$ ، ولذلك فهي مغلقة في الفراغ (X,τ_1) ومن هنا فان τ_1 اقوي من τ_2 .

نظرية 3.4: نفرض إن X فراغ محدب تحدبا محليا ، إذا كان $®_1, ®_2$ مثاليان وكان $®= ®_1\cap ®_2$ ، فـان التبولوجـيا المدمجة من النوع ® تساوي تقاطع التبولوجيا المدمجة من النوع $®_1$ مع التبولوجيا المدمجة من النوع $®_2$.

البرهان : بما ان $®= ®_1\cap ®_2$ ، إذن كل مجموعة مدمجة من النوع ® هي مجموعة مدمجة من النوع $®_1$ و كذلك مجموعة مدمجة من النوع $®_2$ ولذلك فان التبولوجيا المدمجة من النوع ® هـي مجموعـة جزئية من تقاطع التبولوجيا المدمجة من النوع $®_1$ مع التبولوجيا المدمجة من الـنوع $®_2$ إذا كانـت O هي مجموعة غير خالية و تنتمي إلى هذا التقاطع فان O تنتمي الى التبولوجـيا المدمجـة مـن الـنوع $®_1$ ولهـذا فـان $(\delta_n(X \setminus O,U)_{n=0}^{\infty}) \in ®_1$ لجميع قيم $U \in \mu(X)$ حيث $\mu(X)$ هو أساس محلي للصفر في X. وبم أن O تنتمي إلى التبولوجيا المدمجة من النوع $®_2$ ، إذن $(\delta_n(X \setminus O,U)_{n=0}^{\infty}) \in ®_2$ لجميع قيم $U \in \mu(X)$ حيث $\mu(X)$ هـو أسـاس محلـي للصفر في X لهذا فان $(\delta_n(X \setminus O,U)_{n=0}^{\infty}) \in ®$ ومن ثم فان X\O هي مجموعة مدمجة من النوع ® وبالتالي فهي مغلقة في التبولوجيا المدمجة من النوع ® وهذا يبين ان O هي مجموعة مفتوحة في التبولوجيا المدمجة من النوع ® ، لهذا فان التبولوجيا المدمجة من النوع ® تساوي تقاطع التبولوجيا المدمجة من النوع $®_1$ مع التبولوجيا المدمجة من النوع $®_2$.

نظرية 3.5: الصورة الخطية المتصلة للمجموعة المدمجة من النوع ® هي مدمجة من النوع ®

البرهان: انظر النظرية 2.2.7 في المرجع [8] .

نظـرية 3.6: إذا كان ® هيه مثاليا وكان Y,X فضاءين محدبين محليا، و إذا كان τ_1 و τ_2 هما تبولوجـيا مدمجة من النوع ® و معرفان على Y,X على الترتيب ، وبفرض ان f اقتران فوقي خطي متصل بين (X, τ_1) و (Y, τ_2), فان f تكون مغلقة.

الـبرهان: إذا كانت B مجموعة جزئية مغلقة من X فان B=X او B مجموعة جزئية من النوع ® ، وحيث أن f(X)=Y وكذلك الصورة الخطية المتصلة للمجموعة المدمجة من النوع ® هـي مجموعـة مدمجة من النوع ®، وبما ان المجموعة المدمجة من النوع ® تكون مغلقة في التبولوجـيا المدمجـة من النوع ®،إذن f(B) تكون مغلقة في (Y, τ_2) ولذلك فان f هو اقتران مغلق.

نتيجة2.3: اذا كان الاقتران f في النظرية السابقة متصلا و كان هذا الاقتران خطيا و واحد لواحد (one to one) فان f يكون اقترانا مدفونا (embedding) .

نظـرية3.7: اذا كـان (X, τ) فراغا تبولوجيا حيث τ تبولوجيا مدمجة من النوع ® وكانت X ليست مجموعة مدمجة من النوع ® فان لجميع المجموعات الجزئية A غير الخاوية من X ولا تساوي X فان:

i- Int (A)= ϕ إذا وفقط إذا كانت A مغلقة وغير مفتوحة.

ii- cl_X A =X لجميع المجموعات الجزئية Aغير المغلقة.

الـبرهان(i) بما أن A ≠X و كذلك A مغلقة وغير مفتوحة ، إذن A هي مجموعة مدمجة من الـنوع ® و كذلـك فان X\A مجموعة غير مغلقة ، و بالتالي فهي ليست مجموعة مدمجة من النوع ® ولهذا فان أي مجموعة تحتوي المجموعة X\A ليست مجموعة مدمجة من النوع ®، لان أي مجموعـة .جزئية من المجموعة المدمجة من النوع ® تكون مجموعة مدمجة من النوع ® و بالتالي فهي مغلقة. وحيث أن المجموعة المكملة لمجموعة جزئية من A تحتوي على X\A فإنهـا تكـون غير مغلقة، ولهذا فان أي مجموعة جزئية من Aليست مفتوحة وبالتالي فان Int (A)= ϕ.

(ii) بمـا ان أي مجموعة جزئية من المجموعة المدمجة من النوع ® هي مجموعة مدمجة من الـنوع ® وبالتالـي فهـي مغلقة وبما أن A هي مجموعة جزئية من cl_X A و أيضا A ليست مغلقة، إذن cl_X A =X .

ملاحظـة: أتقدم بالشكر الجزيل للأخ الأستاذ إسماعيل الاسطل لترجمته هذا البحث بلغة عربية سليمة

References

[1] Astala, k. and Ramanvjan, M.S. "(S) Nuclear Sets and Operators". Pac. J. Math., Vol. 127, No. 2, (1987), pp. 233-245.

[2] Dubinsky, E., "The Structure of Nuclear Fréchet Spaces", Lecture Note in Math. No. 720, Springer- Verlag, Berlin-Heidelberg, (1979).

[3] Faried, N. and Ramadan, F. " N-Diameters and Kolmogrove Numbers of Finite Cartesian Product of ®-Compact Sets and Direct Sums of Operators." Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, No.68, (1992), pp. 1-10

[4] Jarchow, H. "Locally Convex Spaces ", B. G. Teubener, Stuttgart (1981).

[5] Köhe, G. "Topological Vector Spaces I and II", Springer-Verlage Berlin-Heidelberg, (1969) and (1980).

[6] Pietch, A. " Nuclear Locally Convex Spaces", Akademic Verlin, Berlin, (1972).
[7] Pietch, A. "'Operator Ideals", North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, (1980).
[8]Safi Zeayad " ®-compact operators between Nuclear Kothe spaces" phD thesis El-Aqsa University, 2002.